

فرایندهای تصادفی، تمرین دو،

فصل پانز سال یک هزار و چهار صد و سه

دانشکده علم رایانه و فناوری اطلاعات، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

۱- در وجود رأس تنها (ایزوله) در مدل رایینی-اردوش گراف تصادفی کران پائین زیر را با استفاده از تعمیم کران اجتماع اثبات کنید

$$P(B_n) \geq n(1-p)^{n-1} - \binom{n}{2}(1-p)^{2n-2}$$

۲- فرض کنید فضای نمونه‌ای دارای توزیعی یکنواخت پیوسته در بازه صفر و یک است. از فضای نمونه متوالیا نمونه‌گیری می‌کنیم. نشان دهید قضیه حد مرکزی برای نمونه‌گیری‌ها برقرار است.

۳- N نفر حول میزی نشسته‌اند. هر فرد سکه‌ای می‌ریزد. اگر برآمد رخیتن سکه فرد متفاوت از دو همسایه بغلی‌اش باشد شیرینی دریافت می‌کند. اگر X مت از افراد شیرینی گیرنده باشد، امید ریاضی و وردائی آن را حساب کنید (راهنمایی- از قانون جمع متغیرهای تصادفی بهره بگیرید. همچنین $n > 5$).

۴- توزیع یکنواخت X بین صفر و یک است. مقادیر $E[X^i]$ و $\phi(t)$ را حساب کنید. مقدار $[X^i]$ توزیع نمائی با مقدار λ را حساب کنید (در هر دو مورد از تابع مولد گشتاور استفاده کنید).

۵- فرض کنید نسبت بین دو متغیر با $Y = aX + b$ باشد. تابع مولد گشتاور Y ($\phi_Y(t)$) را بر اساس تابع مولد گشتاور X ($\phi_X(t)$) بنویسید. $E[Y^i]$ برابر چه مقداری است؟

۶- n متغیر تصادفی مستقل داریم و جمع آنها را به صورت $Y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ می‌نویسیم. نشان دهید تابع مولد گشتاور جمع متغیرها برابر با ضرب تک تک تابع مولدهای شتاور متناظر هر متغیر X_i است.

۷- توابع مولد گشتاور دو متغیر تصادفی مستقل از هم X و Y با توزیع‌های دوجمله‌ای به ترتیب (m, p) و (n, p) را داریم. با استفاده از محاسبات توابع مولد گشتاور نشان دهید که $X + Y$ از توزیع دوجمله‌ای $(m+n, p)$ تبعیت می‌کند.

۸- بردار مت n-بعدی X را داریم. بردار متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = A_{m \times n} X + b_{m \times 1}$ تعریف می‌کنیم. الف- ابعاد $Cov(X)$ و $Cov(Y)$ چقدر است؟ اعضای روی قطر اصلی هر یک از دو ماتریس هم‌وردایی چه مقادیری هستند؟ ب- نشان دهید $Cov(Y, Y) = ACov(X, X)A^T$

۹- متغیرهای تصادفی توأم X و Y با چگالی زیر را داریم.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + y, & 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{دفا} \end{cases}$$

بردار متغیر تصادفی $Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ را داریم. $Cov(Z, Z)$ را حساب کنید. ماتریس متقارن حاصل چه نسبتی به ماتریس اصلی دارد؟

۱۰- دو متغیر تصادفی X و Y با توزیع‌های مستقل یکنواخت بین صفر و یک را داریم. بردار متغیر تصادفی $Z = \begin{bmatrix} X \\ X + Y \end{bmatrix}$ را داریم.

$Cov(Z, Z)$ را حساب کنید. ماتریس متقارن حاصل چه نسبتی به ماتریس اصلی دارد؟